

УДК 512.542

О ПРОИЗВОДНОЙ ДЛИНЕ КОНЕЧНОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

Д.А. Ходанович

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON THE DERIVATIVE LENGTH OF A FINITE SOLVABLE GROUP

D.A. Hodanovich

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Получены верхние оценки производной длины фраттининовой фактор-группы в зависимости от индексов максимальных подгрупп разрешимой группы, не содержащих подгруппу Фиттинга.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, максимальная подгруппа, подгруппа Фиттинга, подгруппа Фраттини, производная длина.

The upper estimations of the derivative length of the Frattini quotient group depending on the indices of the maximal subgroups which do not contain a Fitting subgroup in the solvable group have been obtained.

Keywords: finite group, solvable group, maximal subgroup, Fitting subgroup, Frattini subgroup, derivative length.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1], [2].

Любая разрешимая группа обладает нормальным рядом с абелевыми факторами. Длина самого короткого такого ряда называется производной длиной группы G и обозначается через $d(G)$ [1, глава 4.2]. Ясно, что $d(G)=1$ тогда и только тогда, когда G – неединичная абелева группа. Для любого натурального числа $k > 1$ и разрешимой группы G в точности тогда $d(G)=k$, когда $G \in \mathfrak{A}^k \setminus \mathfrak{A}^{k-1}$. Здесь \mathfrak{A} – формация всех абелевых групп, а \mathfrak{A}^k – произведение k копий формации \mathfrak{A} [1, глава 5.1], [2, глава 1.1].

Для натурального k через $\rho(k)$ и $\sigma(k)$ обозначают соответственно максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп и вполне приводимых подгрупп нечетного порядка полной линейной группы $GL(k, \mathbb{F})$, где \mathbb{F} – поле. Согласно [3] такие функции $\rho(k): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\sigma(k): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ существуют и не зависят от поля \mathbb{F} . Значения функций $\rho(k)$ и $\sigma(k)$ известны для каждого натурального k .

Хорошо известно, что в разрешимой группе индекс каждой максимальной подгруппы является степенью некоторого простого числа. На основе этого факта в 2004 году В.С. Монахов [4] ввел следующую функцию

$$m(G) = \max_{p \in \pi(G)} \{\log_p |G : M| \mid M <_{\max} G, |G : M| = p^a\}$$

и установил общую закономерность [4, теорема 1 (2)] между производной длиной каждой

разрешимой группы G и значениями функций $\rho(k)$ и $m(G)$:

$$d(G/\Phi(G)) \leq 1 + \rho(m(G)) \leq 3 + m(G).$$

Здесь $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка разрешимой группы G . Запись $M <_{\max} G$ означает, что M – максимальная подгруппа группы G , а $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G .

В другой статье В.С. Монахова [5] показано, что наибольшее значение $m(G)$ достигается на индексах тех максимальных подгрупп разрешимой группы G , которые не содержат подгруппу Фиттинга $F(G)$. Поэтому вполне естественно исследовать влияние индексов не всех, а только некоторых выделенных максимальных подгрупп на производную длину разрешимой группы. К данной тематике относится настоящая заметка.

Для любого натурального k в каждой разрешимой группе G выделим следующие множества подгрупп:

$$\mathcal{M}(G) = \{M <_{\max} G \mid F(G) \not\subseteq M\};$$

$$\mathcal{M}_{\rho(k)}(G) = \{M \in \mathcal{M}(G) \mid d(M) > \rho(k)\}.$$

Множество $\mathcal{M}(G)$ состоит из всех максимальных подгрупп группы G , не содержащих подгруппу Фиттинга $F(G)$ группы G , и в силу [5] оно непусто в каждой неединичной разрешимой группе G . В зависимости от значения k множество $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G)$ может быть как пустым, так и не пустым. Например, $\mathcal{M}(S_4) = \mathcal{M}_{\rho(1)}(S_4) = \{S_3^x \mid x \in S_4\}$ непусто, а $\mathcal{M}_{\rho(k)}(S_4)$ пусто для любого натурального $k \geq 2$. Здесь S_n – симметрическая группа степени n .

1 Вспомогательные утверждения

Как обычно, подгруппу Фраттини и Фиттинга обозначаем через $\Phi(G)$ и $F(G)$ соответственно, а полупрямое произведение групп A и B с нормальной в AB подгруппой A через $[A]B$. Коммутант группы G обозначается через G' , а $G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$ – i -й коммутант группы G . Согласно [1, лемма 4.6] выполняется равенство $(G/N)^{(i)} = G^{(i)}N/N$ для любого натурального i и любой нормальной подгруппы N . Для любой группы G можно построить цепочку коммутантов

$$G \supseteq G' \supseteq G^{(2)} \supseteq \dots \supseteq G^{(i)} \supseteq G^{(i+1)} \supseteq \dots$$

Если существует номер n такой, что $G^{(n)} = 1$, то группа G называется разрешимой. Наименьшее натуральное n , для которого $G^{(n)} = 1$, называется производной длиной группы G и обозначается через $d(G)$. Несложно проверить, что значение $d(G)$ совпадает с длиной самого короткого нормального ряда группы G с абелевыми факторами.

Лемма 1.1. Для разрешимой группы G справедливы следующие утверждения:

1) если H – подгруппа группы G , то

$$d(H) \leq d(G);$$

2) если N – нормальная подгруппа группы

G , то $d(G/N) \leq d(G) \leq d(N) + d(G/N)$;

3) $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + d(G/F(G))$;

4) если $t \in \mathbb{N}$, $t \leq d(G)$, то

$$d(G^{(t)}) = d(G) - t \text{ и } d(G/G^{(t)}) = t;$$

5) $G^{(d(G)-1)} \subseteq F(G)$ и $d(G/F(G)) \leq d(G) - 1$.

Доказательство. 1. Утверждения 1–2 вытекают непосредственно из определения производной длины и равенства $(G/N)^{(i)} = G^{(i)}N/N$.

3. Согласно [1, теорема 4.24] фактор-группа $F(G)/\Phi(G)$ абелева. Применим утверждение 2 к группе $G/\Phi(G)$ с нормальной подгруппой $F(G)/\Phi(G)$:

$$d(G/\Phi(G)) \leq d(F(G)/\Phi(G)) + d((G/\Phi(G))/(F(G)/\Phi(G))) \leq 1 + d(G/F(G)).$$

4. Пусть $n = d(G)$, $t \in \mathbb{N}$, $t \leq n$. Тогда

$$\begin{aligned} G \supset G' \supset G^{(2)} \dots \supset G^{(t-1)} \supset G^{(t)} \supset \\ \supset G^{(t+1)} \supset \dots \supset G^{(n-1)} \supset G^{(n)} = 1, \\ G^{(t)} \supset G^{(t+1)} \supset \dots \supset G^{(n-1)} \supset G^{(n)} = 1 \end{aligned}$$

и $d(G^{(t)}) = n - t = d(G) - t$. Поскольку

$$G/G^{(t)} \supset G'/G^{(t)} \supset$$

$$\supset G^{(2)}/G^{(t)} \dots \supset G^{(t-1)}/G^{(t)} \supset G^{(t)}/G^{(t)} = 1,$$

то $d(G/G^{(t)}) = t$.

5. Подгруппа $G^{(d(G)-1)}$ абелева и нормальна в G , поэтому

$$G^{(d(G)-1)} \subseteq F(G) \text{ и } d(G/F(G)) \leq d(G) - 1$$

по 4. Лемма доказана.

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций. Пусть \mathfrak{E} – формация всех конечных групп, \mathfrak{F} – некоторая формация и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – \mathfrak{F} -корадикал группы G , т. е. Пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{E} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций \mathfrak{F} и \mathfrak{H} состоит из всех групп G , для которых \mathfrak{H} -корадикал принадлежит формации \mathfrak{F} . Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}^n = \mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{F}$ для любого натурального $n > 1$. Формация \mathfrak{F} называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех абелевых и нильпотентных групп обозначают через \mathfrak{A} и \mathfrak{N} соответственно.

Лемма 1.2. Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число.

1. Тогда и только тогда $d(G) \leq k$, когда

$$G \in \mathfrak{A}^k.$$

2. Тогда и только тогда $d(G) = k$, когда

$$G \in \mathfrak{A}^k \setminus \mathfrak{A}^{k-1}.$$

3. Тогда и только тогда $d(G/\Phi(G)) \leq k$, когда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$.

Доказательство. Утверждения 1 и 2 непосредственно вытекают из определений производной длины и произведения формаций.

3. Пусть $d(G/\Phi(G)) \leq k$. Тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^k$.

Согласно [1, лемма 4.21 (2)] справедливо равенство $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$, поэтому из леммы 1.1 (5) следует, что $G/F(G) \in \mathfrak{A}^{k-1}$ и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$. Обратно, пусть $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$. Тогда $G/F(G) \in \mathfrak{A}^{k-1}$, а так как $F(G)/\Phi(G)$ абелева, то $G/F(G) \in \mathfrak{A}^k$. Лемма доказана.

Лемма 1.3. Если \mathfrak{F} – формация, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Доказательство. Согласно [2, с. 36], произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Лемма 1.4 [5]. Пусть G – разрешимая неединичная группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) подгруппа Фраттини группы G совпадает с пересечением максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга;

2) если $H <_{\max} G$ и $|G:H| = p^h$, p – простое, то существует подгруппа $M <_{\max} G$ такая, что выполняются следующие утверждения:

2.1) $F(G)$ не содержится в M ;

2.2) $|G:M| = q^m$, q – простое, и $h \leq m$.

Лемма 1.5 [6], [7].

1. Если $n=1$, то $\rho(n)=1$.
2. Если $n \in \{2,3,4\}$, то $\rho(n)=n+2$.
3. Если $n \in \{5,6,7\}$, то $\rho(n)=7$.
4. Если $n \in \{8,9\}$, то $\rho(n)=n$.
5. Если $n \in \{10, \dots, 17\}$, то $\rho(n)=10$.
6. Если $n \in \{18, \dots, 25\}$, то $\rho(n)=11$.
7. Если $n \in \{26, \dots, 33\}$, то $\rho(n)=12$.
8. Если $n \in \{34, \dots, 65\}$, то $\rho(n)=13$.
9. Если $n \geq 66$, то $\rho(n) \leq 5 \log_3(n-2) + 53/10$.

В частности, $\rho(n) \leq n+2$. Кроме того, если $n \geq 7$, то $\rho(n) \leq n$, а если $n > 10$, то $\rho(n) < n$.

Лемма 1.6 [8, теорема 4В].

1. Если $n \in \{1,2\}$, то $\sigma(n)=1$.
2. Если $n \in \{3,4\}$, то $\sigma(n)=2$.
3. Если $5 \cdot 7^x \leq n < 15 \cdot 7^x$, то $\sigma(n)=2x+3$.
4. Если $15 \cdot 7^x \leq n < 5 \cdot 7^{x+1}$, то $\sigma(n)=2x+4$.

Из лемм 1.5 и 1.6 вытекает, что функции $\rho(n)$ и $\sigma(n)$ неубывающие.

2 Основной результат

Теорема 2.1. Зафиксируем натуральное число k . Если G – разрешимая группа и индекс каждой подгруппы из $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G)$ не делится на p^{k+1} для всех $p \in \pi(G)$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + \rho(k)$.

Отметим, что теорема охватывает все разрешимые группы, у которых $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G) = \emptyset$.

Доказательство. Согласно введенному обозначению множество $\mathcal{M}(G)$ состоит из всех максимальных подгрупп группы G , не содержащих подгруппу Фиттинга $F(G)$ группы G . Допустим, что G – неединичная группа и $\mathcal{M}(G) = \emptyset$. Тогда каждая максимальная подгруппа из G содержит $F(G)$. Поэтому пересечение всех максимальных подгрупп, которое является подгруппой Фраттини группы G , также содержит подгруппу Фиттинга. Но это в разрешимых группах невозможно [1, лемма 4.21 (1)]. Поэтому допущение неверно и множество $\mathcal{M}(G)$ непусто у каждой неединичной группы G .

Пусть $h = m(G)$. Тогда в группе G существует максимальная подгруппа H такая, что $|G:H| = p^h$ для некоторого $p \in \pi(G)$. По лемме 1.4 (2) существует максимальная подгруппа $M \in \mathcal{M}(G)$ такая, что $|G:M| = q^m$ для некоторого $q \in \pi(G)$ и $h \leq m$. Поскольку $h = m(G)$, то из определения функции $m(G)$ получаем, что $h = m = m(G)$.

Предположим, что M не принадлежит $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G)$. Тогда $M \in \mathcal{M}(G) \setminus \mathcal{M}_{\rho(k)}(G)$, M не содержит $F(G)$ и $d(M) \leq \rho(k)$. Теперь $G = F(G)M$, а поскольку $G/F(G) \cong M/M \cap F(G)$, то $d(G/F(G)) = d(M/M \cap F(G)) \leq d(M) \leq \rho(k)$.

В предпоследнем неравенстве использовалась лемма 1.1 (2). По лемме 1.1 (3)

$$d(G/\Phi(G)) \leq 1 + d(G/F(G)) \leq 1 + \rho(k),$$

и теорема в этом случае справедлива. В частности, теорема доказана в случае $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G) = \emptyset$.

В дальнейшем считаем, что M принадлежит $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G)$. По условию доказываемой теоремы $|G:M|$ не делится на r^{1+k} для всех $r \in \pi(G)$. Это означает, что $h = m = m(G) \leq k$. Теперь, не используя [4, теорема 1(2)], докажем, что $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + \rho(k)$.

Если $k=1$, то все максимальные подгруппы группы G имеют простые индексы. По теореме Хупперта [1, теорема 4.55] группа G является сверхразрешимой. Но у сверхразрешимой группы коммутант G' нильпотентен [1, теорема 4.52], поэтому

$$G' \subseteq F(G), \quad d(G/F(G)) \leq 1.$$

Применяя лемму 1.1 (3), получаем

$$d(G/\Phi(G)) \leq 2 = 1 + \rho(k).$$

Итак, при $k=1$ теорема доказана.

Далее считаем $k \geq 2$. По лемме 1.2 (3) для группы G оценка $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + \rho(k)$ равносильна включению $G \in \mathfrak{NA}^{\rho(k)}$. Согласно лемме 1.3 произведение $\mathfrak{NA}^{\rho(k)}$ является насыщенной формацией.

Проверим, что условия теоремы наследуют все гомоморфные образы группы G . Пусть K – нормальная подгруппа группы G . Если $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G/K) = \emptyset$, то

$$d((G/K)/\Phi(G/K)) \leq 1 + \rho(k)$$

по доказанному и $G/K \in \mathfrak{NA}^{\rho(k)}$ по лемме 1.2 (3). Пусть $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G/K) \neq \emptyset$, $X/K \in \mathcal{M}_{\rho(k)}(G/K)$.

Предположим, что $|G/K : X/K|$ делится на r^{1+k} для некоторого $r \in \pi(G/K)$. Так как

$$|G/K : X/K| = |G : X|,$$

то $|G : X|$ делится на r^{1+k} для $r \in \pi(G)$. Получили противоречие с тем, что $m(G) \leq k$. Поэтому предположение неверно, условия теоремы наследуют все гомоморфные образы группы G , и можно применять индукцию по порядку группы. Следовательно, $G/K \in \mathfrak{NA}^{\rho(k)}$ для всех неединичных нормальных подгрупп K . Ввиду леммы 1.3 формация $\mathfrak{NA}^{\rho(k)}$ насыщена, поэтому $\Phi(G) = 1$.

Пусть подгруппа Фиттинга $F(G)$ не является минимальной нормальной подгруппой в G . Для разрешимой группы с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга

$$F(G) = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$$

является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп K_i группы G , см. [1, теорема 4.24]. По индукции $G/K_i \in \mathfrak{NA}^{\rho(k)}$, а поскольку $\mathfrak{NA}^{\rho(k)}$ – формация и $n \geq 2$, то $G \in \mathfrak{NA}^{1+\rho(k)}$.

В дальнейшем считаем, что $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G . По [1, теоремы 4.22, 4.24] $F = C_G(F)$, а по [1, теорема 4.23] существует подгруппа M в группе G такая, что $G = [F]M$. Ясно, что M – максимальная подгруппа и

$$|G : M| = |F| = p^t, \quad p \in \pi(G), \quad t \leq k.$$

Поскольку F – элементарная абелева p -подгруппа порядка p^t и $F = C_G(F)$, то M изоморфна G/F и M изоморфна по [1, теорема 2.8] подгруппе из группы $\text{Aut} F$, которая по [1, теорема 2.50] совпадает с $GL(t, p)$. Из того, что F – минимальная нормальная подгруппа группы G следует, что подгруппа M изоморфна неприводимой разрешимой подгруппе группы $GL(t, p)$. Теперь из определения функции ρ получаем:

$$d(M) \leq \rho(t) \leq \rho(k).$$

Из леммы 1.2 (1) следует, что $M \in \mathfrak{A}^{\rho(k)}$, поэтому $G \in \mathfrak{NA}^{\rho(k)}$. Теперь из леммы 1.2 (3) вытекает, что $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + \rho(k)$. Теорема доказана.

Следствие 2.1. Зафиксируем натуральное число k . Пусть G – разрешимая группа и $\Phi(G) = 1$. Если $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G) \neq \emptyset$ и индекс каждой подгруппы $M \in \mathcal{M}_{\rho(k)}(G)$ не делится на p^{k+1} для всех $p \in \pi(G)$, то $d(G) = 1 + \rho(k)$.

Доказательство. Согласно теореме 2.1 $d(G) \leq 1 + \rho(k)$. По условию существует подгруппа $M \in \mathcal{M}_{\rho(k)}(G)$ такая, что $d(M) > \rho(k)$.

Теперь из леммы 1.1 (1) получаем, что $\rho(k) < d(M) \leq d(G) \leq 1 + \rho(k)$,

что возможно только в случае $d(M) = d(G) = 1 + \rho(k)$. Следствие доказано.

Согласно теореме Томпсона–Фейта любая группа нечетного порядка разрешима. Для них воспользуемся функцией $\sigma(k)$. Таким образом, для группы G нечетного порядка через $\mathcal{M}_{\sigma(k)}(G)$ обозначим множество всех максимальных подгрупп M , обладающих следующими свойствами: M не содержит подгруппу

Фиттинга; $d(M) > \sigma(k)$. Повторяя доказательство теоремы с заменой функции $\rho(k)$ на $\sigma(k)$ получаем

Следствие 2.2. Зафиксируем натуральное число k . Если G – группа нечетного порядка и индекс каждой подгруппы $M \in \mathcal{M}_{\sigma(k)}(G)$ не делится на p^{k+1} для всех $p \in \pi(G)$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + \sigma(k)$.

Конкретизируя значения k и используя леммы 1.5 и 1.6, получаем еще два следствия.

Следствие 2.3. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что в разрешимой группе G индекс каждой подгруппы $M \in \mathcal{M}_{\rho(k)}(G)$ не делится на p^{k+1} для всех $p \in \pi(G)$. Тогда:

- 1) если $k = 1$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 2$;
- 2) если $k \in \{2, 3, 4\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 3 + k$;
- 3) если $k \in \{5, 6, 7\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 8$;
- 4) если $k \in \{8, 9\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + k$;
- 5) если $k \in \{10, \dots, 17\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 11$;
- 6) если $k \in \{18, \dots, 25\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 12$;
- 7) если $k \in \{26, \dots, 33\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 13$;
- 8) если $k \in \{34, \dots, 65\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 14$;
- 9) если $k \geq 66$, то

$$d(G/\Phi(G)) \leq 1 + 5 \log_9(k - 2) + 53/10.$$

Следствие 2.4. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что в группе G нечетного порядка индекс каждой подгруппы $M \in \mathcal{M}_{\sigma(k)}(G)$ не делится на p^{k+1} для всех $p \in \pi(G)$. Тогда:

- 1) если $k \in \{1, 2\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 2$;
- 2) если $k \in \{3, 4\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 3$;
- 3) если $5 \cdot 7^x \leq k < 15 \cdot 7^x$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 4 + 2x$;
- 4) если $15 \cdot 7^x \leq k < 5 \cdot 7^{x+1}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 5 + 2x$.

Отметим, что доказанная теорема и ее следствия развивают результаты работы [9], в которой найдены оценки нильпотентной длины разрешимой группы с ограниченными индексами неметанильпотентных максимальных подгрупп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Мн. : Вышэйшая школа. – 2006. – 207 с.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
3. Zassenhaus, H. Beweis eines Satzes über diskrete Gruppen / H. Zassenhaus // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. – 1938. – Bd. 12. – S. 289–312.

-
4. Монахов, В.С. Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, № 4. – С. 411–424.
5. Монахов, В.С. Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 31–33.
6. Dixon, J.D. The solvable length of a solvable linear groups / J.D. Dixon // Math. Z. – 1968. – Bd. 12. – S. 151–158.
7. Newman, M.F. The solvable length of a solvable linear groups / M.F. Newman // Math. Z. – 1972. – Bd. 126. – S. 59–70.
8. Palfy, P.P. Bounds for linear groups of odd order / P.P. Palfy // Rend. Circ. mat. Palermo. – Ser. 2. 1990. – 39. Suppl. № 23. – P. 253–263.
9. Монахов, В.С. О влиянии индексов максимальных подгрупп на нильпотентную длину конечной разрешимой группы / В.С. Монахов, Д.А. Ходанович // Доклады НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 4. – С. 23–28.

Поступила в редакцию 15.08.11.